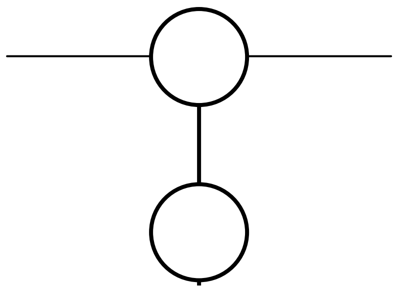
PROBLEMAS PARA PREPARAR UNA OLIMPIADA DE FÍSICA

MECÁNICA IV

28.- En la figura inferior la esfera superior está hecha de un material de densidad ρ. La que está completamente sumergida en el agua tiene una masa que es cuatro veces mayor que la que flota en la superficie. Ambas tienen el mismo volumen. La que flota, lo hace sumergida a medias en el agua. Se pide calcular la densidad ρ y la tensión de la cuerda que las une. Realizar los cálculos para V = 10 L. Densidad del agua, d = 10^3 kg/m^3.



Si el sistema se encuentra en equilibrio la suma de las fuerzas que actúan sobre cada una de las esferas tiene que ser nula

En la figura 1 están representadas las fuerzas que actúan sobre cada esfera

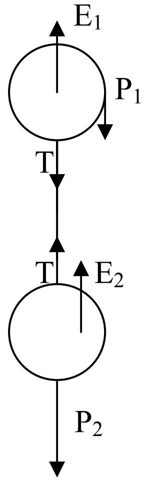


Fig. 1

Todas las fuerzas actúan en la dirección vertical, aunque algunas de ellas se han desplazado para mayor claridad.

Sobre la esfera superior actúan: el empuje $E_1 = \frac{V}{2}dg$; el peso $P_1 = V\rho g$; y la tensión de la cuerda T.

Sobre la esfera sumergida actúan: el empuje $E_2 = Vdg$, el peso $P_2 = 4V\rho g$; y la tensión de la cuerda T.
Si tomamos como sentido positivo el vertical hacia abajo, podemos escribir:

$$V\ \rho g + T - \frac{V}{2}dg = 0 \quad (1) \qquad ; \quad 4V\ \rho g - T - Vdg = 0 \quad (2)$$

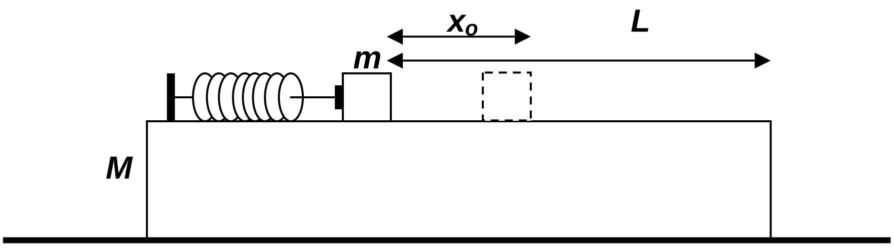
Sumamos las ecuaciones (1) y (2)

$$5V\ \rho g-\frac{3}{2}Vdg=0 \qquad \Rightarrow \qquad \rho=\frac{3}{10}d$$

De la ecuación (1) se deduce:

$$V\ \frac{3}{10}dg+T-\frac{V}{2}dg=0 \qquad \Rightarrow \qquad T=\frac{1}{5}V=\frac{1}{5}*10.10^{-3}=2.10^{-3}\,N$$

29.- En la figura inferior, la plataforma M carece de rozamiento sobre el suelo, x_o representa la distancia que se ha comprimido el muelle. La masa m tiene un coeficiente de rozamiento μ con la masa M y al dejar en libertad el muelle es empujada por éste y abandona la plataforma después de recorrer la distancia L.



K es la constante elástica del muelle. Calcular la velocidad de la masa M en el instante en el que m abandona la plataforma.

Consideremos un sistema inercial ligado al suelo y designemos con v la velocidad que tiene m respecto de M justamente en el momento de salir de la plataforma y con V la velocidad de la plataforma con respecto al suelo.

En la posición indicada en la figura el sistema almacena una energía potencial elástica que se convierte en:

cinética de m, moviéndose hacia la derecha con una velocidad v-V respecto del suelo,

en cinética de M (moviéndose hacia la izquierda)

y en trabajo de rozamiento.

$$\frac{1}{2}Kx_o^2=\frac{1}{2}m(v-V)^2+\frac{1}{2}MV^2+\mu mgL \quad (1)$$

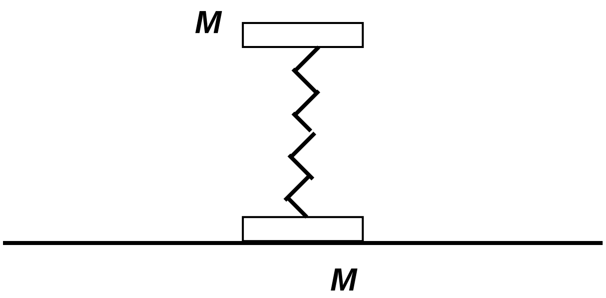
La conservación de la cantidad de movimiento nos permite escribir

$$m(v - V) = MV \qquad \Rightarrow \qquad (v - V)^2 = \frac{M^2V^2}{m^2}$$

Sustituyendo la última expresión en (1), resulta:

$$\frac{1}{2}Kx_o^2 = \frac{1}{2}m\frac{M^2V^2}{m^2} + \frac{1}{2}MV^2 + \mu mgL \qquad \Rightarrow \qquad V = \sqrt{\frac{\left(Kx_o^2 - 2\mu\ mgL\right)\ m}{M(M+m))}}$$

30.- Dos masas iguales, M, están apoyadas una sobre la otra mediante el muelle de constante elástica k



Si la masa superior se empuja hacia abajo el muelle se encoge. Se pide a partir de qué valor x, al dejar en libertad el sistema la masa inferior se levanta del suelo. Si el muelle se comprime para un valor y > x, calcular la altura que se desplaza el centro de masas del sistema. Se supone que el muelle carece de masa.

Cuando el muelle se comprime una longitud x, almacena energía potencial, al dejarlo en libertad el muelle comienza a estirarse y la masa superior adquiere velocidad, pasa por la posición indicada en la figura del problema y a partir de ahí el muelle comienza a estirarse y la velocidad de la masa superior disminuye hasta anularse. En ese instante el muelle se ha estirado una longitud Λ y el extremo inferior del muelle tira de la masa M inferior con una fuerza que es igual al peso de esta masa y esta es la condición para que la masa inferior pueda izarse sobre el suelo. En la figura 1 están representadas las distintas fases del proceso.

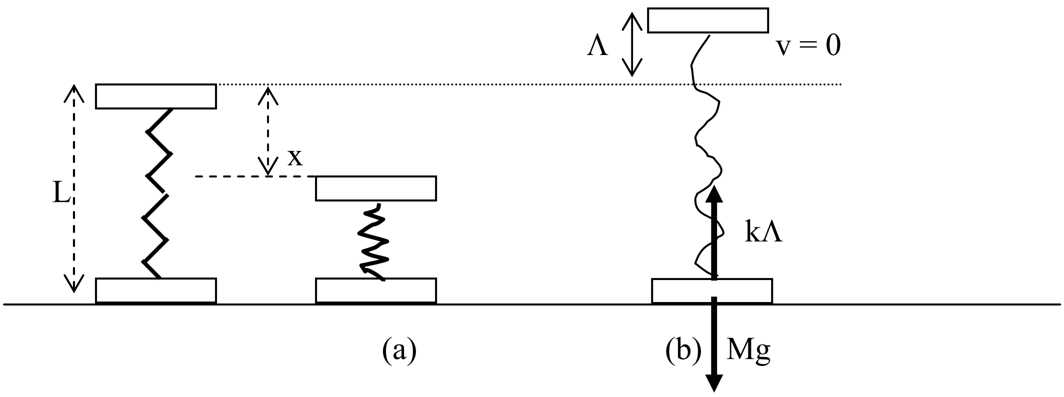


Fig. 1

Aplicamos el principio de conservación de la energía entre las posiciones (a) y (b). Tanto en (a) como en (b) el sistema tiene energía potencial elástica y gravitatoria.

$$\frac{1}{2}kx^2 + Mg(L-x) = \frac{1}{2}k\Lambda^2 + Mg(L+\Lambda)$$

En (b) se cumple la condición $k\Lambda = Mg$. De ambas relaciones resulta:

$$\frac{1}{2}kx^2 - Mgx - \frac{3M^2g^2}{2k} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x^2 - \frac{2Mg}{k}x - \frac{3M^2g^2}{k^2} = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado:

$$x = \frac{\frac{2Mg}{k} \pm \sqrt{\frac{4M^2g^2}{k^2} + \frac{16M^2g^2}{k^2}}}{2} \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{\frac{2Mg}{k} \pm \frac{4Mg}{k}}{2}$$

La solución positiva es: $x = \frac{3mg}{k}$

Si ahora el muelle se comprime una longitud y > x, resulta que cuando la masa M inferior comience a levantarse del suelo la masa superior tiene una velocidad ascendente que designamos con v. Si volvemos a la figura 1 (b) la diferencia es que ahora en lugar de ser la velocidad nula tiene un valor que hemos designado con v. Al aplicar ahora el principio de conservación de la energía hemos de añadir la energía cinética de la masa superior

$$\frac{1}{2}ky^2 + Mg(L-y) = \frac{1}{2}k\Lambda^2 + Mg(L+\Lambda) + \frac{1}{2}Mv^2$$

En ese instante se sigue cumpliendo que $k\Lambda = Mg$

De ambas ecuaciones se deduce que

$$v^2 = \frac{ky^2}{M} - 2gy - \frac{3Mg^2}{k} \quad (1)$$

v es la velocidad de la masa superior, justamente cuando la masa m se despega del suelo , por tanto, esta masa tiene velocidad cero. En ese instante la velocidad del centro de masas del sistema es

$$2Mv_{Cm} = mv + m*0 \quad \Rightarrow \quad v_{Cm} = \frac{v}{2} \quad \Rightarrow \quad v_{CM}^2 = \frac{v^2}{4}$$

A partir del momento en que la masa inferior se levanta del suelo, podemos considerar a todo el sistema como si su masa se encontrase concentrada en el centro de masas, independizándonos de los movimientos individuales de las masas. Según lo dicho el centro de masas queda sometido a la acción del campo gravitatorio terrestre y el centro de masas alcanzará su máxima altura cuando la velocidad se anule.

$$h = \frac{v_{CM}^2}{2g} = \frac{ky^2}{8Mg} - \frac{y}{4} - \frac{3Mg}{8k}$$

Esta altura se mide desde que el centro de masas ocupa la posición $\frac{L+\Lambda}{2}$, por consiguiente, el incremento de altura del centro de masas desde la posición inicial (la que corresponde a la figura del enunciado), vale :

$$\Delta h = \frac{v_{CM}^2}{2g} = \frac{ky^2}{8Mg} - \frac{y}{4} - \frac{3Mg}{8k} + \frac{\Lambda}{2} = \frac{v_{CM}^2}{2g} = \frac{ky^2}{8Mg} - \frac{y}{4} + \frac{5Mg}{8k}$$

31.- Una esfera de masa m, y radio R, dotada de una velocidad lineal v_o y sin velocidad angular se deposita suavemente sobre un suelo rugoso, siendo el coeficiente de rozamiento entre la esfera y el suelo μ. Calcular el tiempo que transcurre y el camino recorrido, hasta que la esfera se mueve con movimiento uniforme, de modo que a partir de ese instante cesa el rozamiento. Calcular, cuando el movimiento es uniforme, la velocidad lineal y angular de la esfera. Resolver el problema anterior cuando la esfera carece de velocidad lineal y posee una rotación, en el sentido de las agujas del reloj, con velocidad ω_o alrededor de un eje que pasa por su centro de masas. Dato: $I_{CM} = \frac{2}{5} mR^2$

Cuando la esfera contacta con el suelo actúan las fuerzas indicadas en la figura 1.

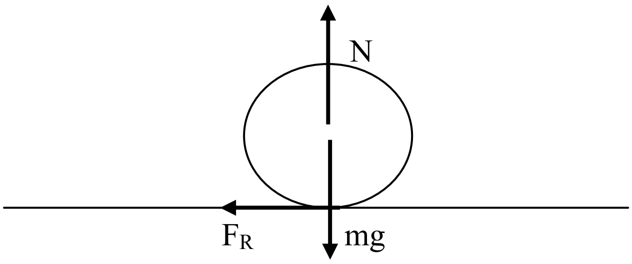


Fig.1

La fuerza de rozamiento F_R cumple dos funciones 1) Al oponerse al movimiento de traslación provoca una disminución de la velocidad lineal de la bola 2) Al crear un momento respecto del centro de masas determina que exista una aceleración angular y por consiguiente la bola adquiera velocidad de rotación. En resumen, la velocidad lineal del centro de masas disminuye al mismo tiempo que aumenta la velocidad de rotación respecto del centro de masas. El punto de contacto de la esfera con el suelo está dotado de dos velocidades una la de traslación del centro de masas y otra de traslación debido a la rotación (figura 2)

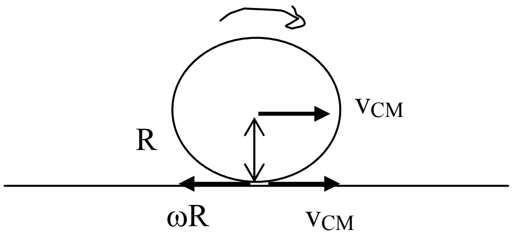


Fig. 2

Cuando estas velocidades son iguales el movimiento es uniforme y a partir de ahí la fuerza de rozamiento se desvanece y el movimiento es una rodadura pura ideal

Traslación $\qquad F_R = ma = \mu N = \mu mg \quad \Rightarrow \quad a = \mu g$

La aceleración está dirigida hacia la izquierda y provoca una disminución de la velocidad lineal

$$v_{CM} = v_o - \mu g t \quad (1)$$

Rotación $\qquad F_R * R = \mu m g R = I\alpha = \frac{2}{5} m R^2 \alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{5}{2}\frac{\mu g}{R}$.

Esta aceleración angular es la causa de que la bola adquiera velocidad angular

$$\omega = \alpha t = \frac{5}{2}\frac{\mu}{R} g t \quad (2)$$

Cuando la variable t adquiera el valor t_F, se cumple para el punto de contacto con el suelo

$$v_o - \mu g t_F = \frac{5}{2}\frac{\mu g}{R} t_F * R \quad \Rightarrow \quad \frac{7}{2}\mu g t_F = v_o \quad \Rightarrow \quad t_F = \frac{2}{7}\frac{v_o}{\mu g}$$

El camino recorrido hasta ese instante vale:

$$\Delta s = v_o t_F - \frac{1}{2}\mu g t_F^2 = \frac{2 v_o^2}{7\mu\ g} - \frac{1}{2}\mu g \frac{4 v_o^2}{49(\mu g)^2} = \frac{12}{49}\frac{v_o^2}{\mu\ g}$$

Si se sustituye el valor de t_F en (1) y (2)

$$v_{CM} = v_o - \mu g t = v_0 - \mu\ g \frac{2 v_o}{7\mu\ g} = \frac{5 v_0}{7} \quad ; \quad \omega = \frac{5}{2}\frac{\mu}{R} g \frac{2}{7}\frac{v_o}{\mu\ g} = \frac{5}{7}\frac{v_o}{R}$$

Cuando la bola lleve velocidad angular ω_o y carezca de velocidad lineal las fuerzas que actúan en contacto con el suelo rugoso están representadas en la figura 3.

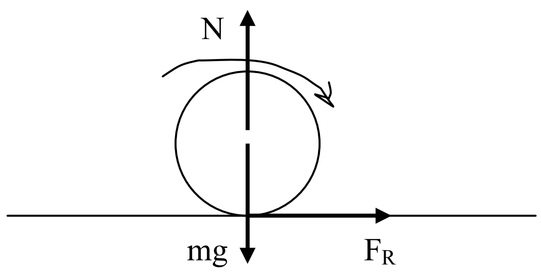


Fig. 3

La fuerza de rozamiento por una parte acelera a la bola de modo que adquiere velocidad lineal de traslación y por otra retarda con su momento la velocidad angular inicial de la bola. En resumen, aumenta la velocidad lineal y disminuye la angular hasta que se cumpla que v = ω r.

Traslación : La aceleración lineal vale:

$$F_R = \mu N = \mu mg = ma \quad \Rightarrow \quad a = \mu g$$

$$v_{CM} = at = \mu gt \quad (3)$$

Rotación : El momento de la fuerza de rozamiento vale

$$F_R{*}R = \mu mgR = I\alpha = (2/5)\, mR^2\alpha \ ; \ \alpha = \frac{5\mu g}{2R}$$

$$\omega = \omega_o - \frac{5\mu g}{2R} t \quad (4)$$

Cuando la variable t adquiera un valor determinado tx, el movimiento es uniforme y entonces:

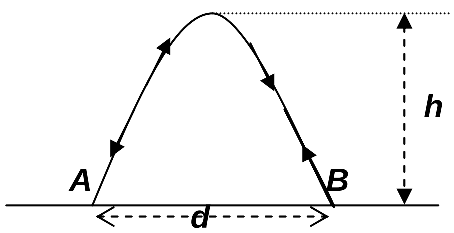
$$v_{CM} = \omega R \quad \Rightarrow \quad \mu g t_x = \omega_o R - \frac{5\mu g t_x}{2R} R \quad \Rightarrow \quad t_x = \frac{2\omega_o R}{7\mu g}$$

Se sustituye t_x en (3) y (4)

$$v_{CM} = \mu g \frac{2\omega_o R}{7\mu g} = \frac{2\omega_o R}{7} \quad ; \quad \omega = \omega_o - \frac{5\mu g}{2R}\frac{2\omega_o R}{7\mu g} = \frac{2\omega_o}{7}$$

$$\Delta s = \frac{1}{2} a t_x^2 = \frac{1}{2}\frac{5\mu g}{2R} * R * \left(\frac{2\omega_o R}{7\mu g}\right)^2 = \frac{5}{49}\frac{\omega_o^2 R^2}{\mu g}$$

32.- Una bola elástica de radio R, puede botar y rebotar sucesivamente sobre un suelo rugoso siguiendo siempre la misma trayectoria parabólica, debido a su movimiento de rotación Esto supone que en el choque contra el suelo no exista deslizamiento que pueda dar lugar a perdidas de energía



la trayectoria seguida por la bola es una parábola como la de la figura. Determinar el valor mínimo del coeficiente de rozamiento y la velocidad angular de la bola durante el vuelo.

Designamos con α el valor del ángulo con que rebota la bola en el suelo y con v la velocidad, calculamos d y h en función del ángulo.

$$x = v\ \cos\alpha\ t \quad ; \quad y = v\ \text{sen}\alpha\ t - \frac{1}{2}gt^2$$

Cuando la bola partiendo de A llegue a B la coordenada y = 0 y la x = d.

$$0 = v\ \text{sen}\alpha\ t - \frac{1}{2}gt^2 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{2v\ \text{sen}\alpha}{g} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{2v^2\text{sen}\alpha\ \cos\alpha}{g} \quad (1)$$

Cuando la bola llegue a la altura h , el valor de x = d/2 y el de y = h

$$\frac{d}{2} = v\ \cos\alpha\ t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{2v^2\text{sen}\alpha\ \cos\alpha}{2vg\cos\alpha} \quad ; \qquad h = v\ \text{sen}\alpha\ \frac{v\text{sen}\alpha}{g} - \frac{1}{2}g\frac{v^2\text{sen}^2\alpha}{g^2} \quad \Rightarrow$$

$$h = \frac{v^2\text{sen}^2\alpha}{2g} \quad (2)$$

Cuando la bola alcance la altura máxima yendo de A a B posee una velocidad lineal del centro de masas y una velocidad angular como indica la figura 1 (a) . Cuando la bola después de rebotar en B alcance la altura máxima tiene la misma velocidad angular y lineal en módulo pero han cambiado de sentido, figura 1 (b)

Fig. 1

En consecuencia en cada rebote existe un cambio en el momento lineal y angular. Por ejemplo, en el punto de rebote A aparecen fuerzas (figura 2) que son las causas de dichos cambios que se producen en un tiempo muy corto $\Delta t = t_1 - t_2$

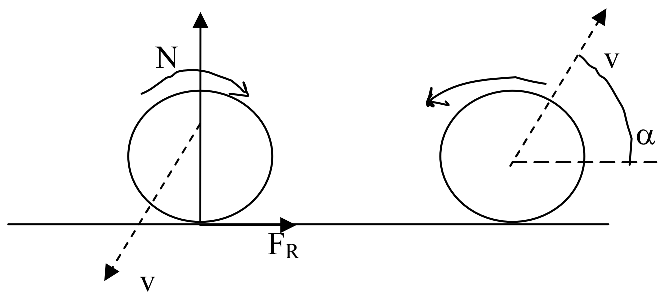


Fig. 2

El cambio en el momento lineal en la dirección horizontal vale

$$2mv\ \cos\alpha = \int_{t1}^{t2} F_R dt \quad (3)$$

El cambio en el momento lineal en la dirección vertical vale

$$2mv\ \operatorname{sen}\alpha = \int_{t1}^{t2} N dt \quad (4)$$

El cambio en el momento angular vale

$$2I\omega = \left[\int F_R dt\right] R = 2 * \frac{2}{5} mR^2 * \omega \quad (5)$$

El coeficiente de rozamiento debe valer como mínimo $\mu = \frac{F_R}{N}$ y de las ecuaciones (3) y (4) se deduce :

$$2mv\ \cos\alpha = \int_{t1}^{t2} \mu\ N dt = \mu 2mv\ \operatorname{sen}\alpha \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} \quad (6)$$

Dividiendo la ecuación (1) por la (2)

$$\frac{d}{h} = \frac{\frac{2v^2 \operatorname{sen}\alpha\ \cos\alpha}{g}}{\frac{v^2\ \operatorname{sen}^2\alpha}{2g}} = \frac{4\ \cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} \quad \mathbf{(7)}$$

Llevando este resultado a la ecuación (6)

$$\mu = \frac{d}{4h}$$

A partir de las ecuaciones (3) y (5)

$$2mv\ \cos\alpha\ R = \frac{4}{5} mR^2\omega \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{5v\ \cos\alpha}{2R} \quad (8)$$

De la ecuación (2) se deduce:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{2hg}}{v} \text{ y de la (7) } \cos\alpha = \frac{d \operatorname{sen}\alpha}{4h} = \frac{d\sqrt{2hg}}{4vh}$$

Llevando este resultado a (8) resulta:

$$\omega = \frac{5v}{2R}\frac{d\sqrt{2hg}}{4vh} = \frac{5d}{4R}\sqrt{\frac{g}{2h}}$$

33.- Un ventilador manda una corriente de aire, que puede considerarse de forma cilíndrica, con una velocidad de 10 m/s siendo el diámetro de la corriente 45 cm. La densidad del aire es ρ = 1,3 kg/m^3. Calcular la fuerza necesaria para inmovilizar el ventilador.

En la figura 1 se ha seleccionado una sección S en un instante t, más las partículas que entrarán en S en un intervalo Δt con velocidad v_1. En el tiempo $t+\Delta t$ consideramos al sistema S más las partículas que lo abandonan en el intervalo Δt con velocidad v_2.

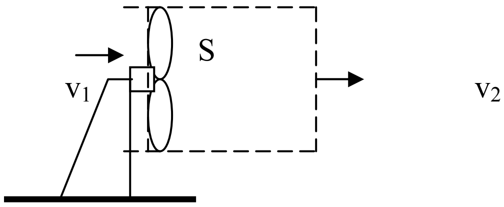


Fig. 1

La masa del sistema S permanece constante luego la masa de las partículas que entran es igual a las que salen. La variación de la cantidad de movimiento es igual al impulso de las fuerzas aplicadas en S que corresponden al ventilador

$$F = \frac{\Delta m (v_2 - v_1)}{\Delta t}$$

Prácticamente la partículas que penetran en el sistema S lo hacen con velocidad nula por lo que la ecuación anterior es de la forma

$$F = \frac{\Delta m \ v_2}{\Delta t} \ (1)$$

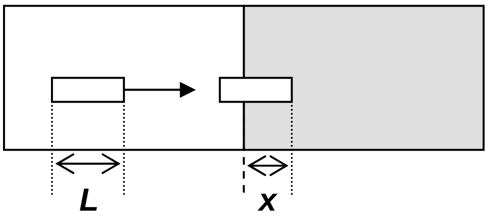
Δm es la masa de las partículas contenidas en un cilindro de base circular de diámetro D = 0,45 m y altura $\Delta s = v_2 \ \Delta t$, luego:

$$\Delta m = \frac{\pi D^2}{4} v_2 \Delta t * \rho$$

De esta última ecuación y de la (1) resulta:

$$F = \frac{\frac{\pi D^2}{4} v_2 * v_2 \ \Delta t * \rho}{\Delta t} = \frac{\pi * 0{,}45^2 * 10^2 * 1{,}3}{4} = 20{,}7 \ \ N$$

34.- Una barra rectangular de lado mayor L se mueve con velocidad constante v_o por una superficie plana sin rozamiento, tal como indica la figura. En un momento determinado penetra en otra superficie plana contigua a la anterior en la que existe un coeficiente de rozamiento entre la barra y el suelo de valor μ. Calcular la velocidad v_o de la barra si esta se para cuando ha penetrado en la superficie rugosa x = ¾ L



Designamos con α la longitud de barra que se encuentra en la superficie rugosa en un instante t. En ese momento la fuerza que se opone al movimiento de la barra es la fuerza de rozamiento debido al peso de barra que se encuentra dentro de la superficie rugosa

$$F_R = \mu N = -\mu \frac{mg}{L}\alpha = -ma_x \quad \Rightarrow \quad -\mu \frac{g}{L}\alpha = \frac{dv_x}{dt} = \frac{dv_x}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dt} = \frac{dv_x}{d\alpha}v_x$$

El signo menos nos indica que la aceleración es negativa respecto de la velocidad de la barra. De la anterior relación se deduce que

$$-\int_0^x \mu \frac{g}{L}\alpha d\alpha = \int_{vo}^{o} v_x dv_x \quad \Rightarrow \quad \left[-\mu \frac{g}{L}\frac{\alpha^2}{2}\right]_0^{\frac{3L}{4}} = \left[\frac{v_x^2}{2}\right]_{vo}^{0} \quad \Rightarrow \quad \left[-\mu \frac{g}{L}\frac{9\boldsymbol{L}^2}{16*2}\right] = -\frac{v_o^2}{2}$$

$$v_o = \frac{3}{4}\sqrt{\mu g L}$$

35.- Calcular a qué altura es necesario elevarse sobre el Polo Norte, para poder ver un satélite geoestacionario. Datos: Radio de la Tierra . R_T = 6400 km, intensidad del campo gravitatorio en la superficie terrestre g_o = 9,81 N/kg.

Un satélite geoestacionario su órbita se encuentra en el plano del ecuador terrestre y tiene un periodo de 24 horas. Su característica es que visto desde un lugar del ecuador parece que se encuentra en reposo respecto de ese lugar, puesto que su periodo de rotación coincide con el de la Tierra.

Calculamos la distancia que existe desde el centro de la Tierra a la posición del satélite, para ello establecemos que la fuerza centrípeta que actúa sobre el satélite es la fuerza de atracción gravitatoria entre la Tierra y dicho satélite.

$$\frac{m_s v^2}{R_s} = G\frac{M_T * m_s}{R_s^2} \quad \Rightarrow \quad v^2 = G\frac{M_T}{R_s}$$

Por otra parte tenemos las ecuaciones:

$$v = \frac{2\pi\ R_S}{T} \qquad ; \qquad g_o = G\frac{M_T}{R_T^2}$$

que llevadas a la ecuación (1)

$$\frac{4\pi^2 R_S^2}{T^2} = \frac{g_o R_T^2}{R_S} \Rightarrow R_S = \sqrt[3]{\frac{g_o R_T^2 T^2}{4\pi^2}} = \sqrt{\frac{9,81 * \left(6400.10^3\right)^2 \left(24 * 3600\right)^2}{4\pi^2}} = 4,24.10^7 \text{ m}$$

En la figura 1 se representa la situación del satélite y de la Tierra (no dibujado a escala)

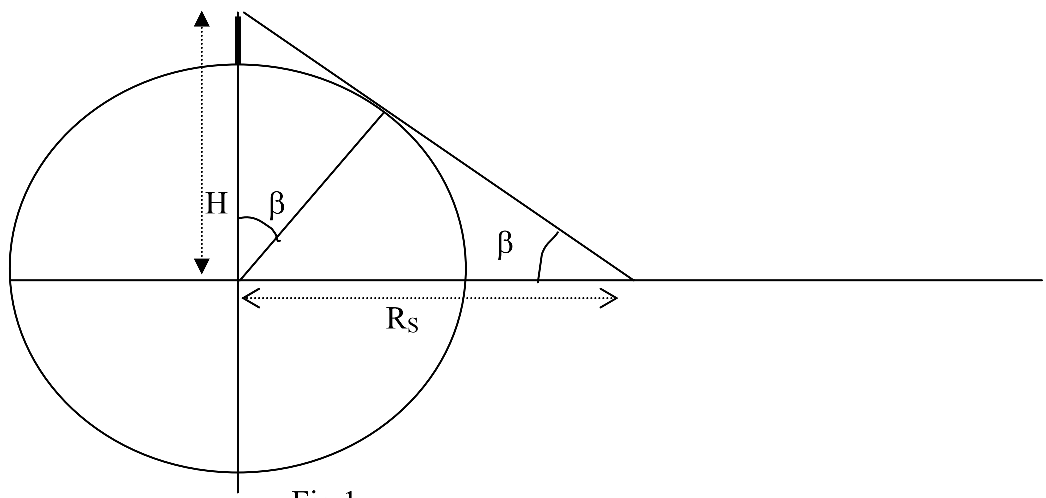


Fig.1

Observando la figura 1 se deduce que $\quad \text{tag } \beta = \frac{R_T}{R_S} = \frac{6400}{4,24.10^4} \qquad \beta = 8,59^o$

$$\cos \beta = \frac{R_T}{H} \quad \Rightarrow H \approx 6473\text{km} \ ; \text{altura sobre el Polo Norte} \approx 73\text{km}$$